

Examenul național de bacalaureat 2022
Proba E. c)

Matematică $M_{\text{st-nat}}$

Varianta 7

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

ЗАВДАННЯ I

(30 балів)

- 56 1. Докажіть, що середнє арифметичне чисел $a = 20 - \sqrt{21}$ і $b = 22 + \sqrt{21}$ дорівнює 21.
- 56 2. Розглядають функції $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x - 1$ і $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = 3 - x$. Докажіть, що $f(a) + g(a) = 2$, для будь-якого дійсного числа a .
- 56 3. У множині дійсних чисел розв'яжіть рівняння $\sqrt{7x-6} = x$.
- 56 4. Знайдіть скільки парних двоцифрових натуральних чисел мають цифри елементами множини $\{1, 2, 3, 4\}$.
- 56 5. У декартовому репері xOy розглядають точки $A(6, 0)$ і $B(6, 6)$. Докажіть, що трикутник AOM рівнобедрений, де точка M - середина відрізка OB .
- 56 6. Розглядають прямокутний трикутник ABC , A прями́й кут, $AC = 4$, міра кута B дорівнює 60° . Докажіть, що довжина висоти опущена з вершини A у трикутнику ABC дорівнює 2.

ЗАВДАННЯ II

(30 балів)

1. Розглядають матриці $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ і $A(x) = \begin{pmatrix} 1 & -x \\ x & x+1 \end{pmatrix}$, де x - дійсне число.
- 56 а) Докажіть, що $\det(A(1)) = 3$.
- 56 б) Докажіть, що $A(-1) \cdot A(2) - A(-1) = 2I_2$.
- 56 в) Знайдіть дійсні числа x для яких $A(x) \cdot A(-x) + xA(x) = 3I_2$.
2. На множині дійсних чисел задають закон композиції $x \circ y = 4(xy + 1) - 3(x + y)$.
- 56 а) Докажіть, що $1 \circ 2 = 3$.
- 56 б) Докажіть, що, якщо $a \circ 3 = 4$, то $a \circ (-a) = 0$.
- 56 в) Знайдіть дійсні значення x для яких $(x \circ 1) \circ (x - 1) \leq 4$.

ЗАВДАННЯ III

(30 балів)

1. Розглядають функцію $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x^2 + x + 3 - 5 \ln x$.
- 56 а) Докажіть, що $f'(x) = \frac{(x-1)(4x+5)}{x}$, $x \in (0, +\infty)$.
- 56 б) Докажіть, що $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) + 5 \ln x}{3 - x - x^2} = -2$.
- 56 в) Докажіть, що $2x^2 + x \geq 3 + 5 \ln x$, для будь-якого $x \in (0, +\infty)$.
2. Розглядають функцію $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (3 - 2x)e^x$.
- 56 а) Докажіть, що $\int_0^1 \frac{f(x)}{e^x} dx = 2$.
- 56 б) Докажіть, що $\int_0^2 f(x) dx = e^2 - 5$.
- 56 в) Знайдіть $a \in (-\infty, 1)$ для якого $\int_a^1 \frac{e^{3x}}{f^3(x)} dx = \frac{2}{9}$.